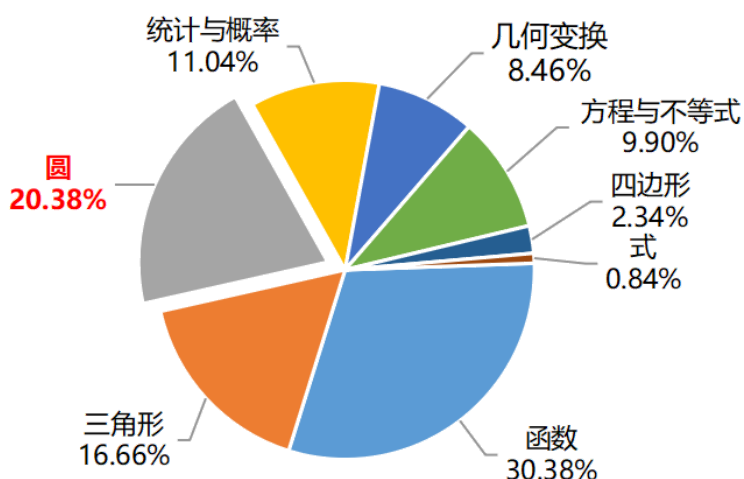


第1讲 圆基础与垂径定理

圆属于人教版教材第二十四章的内容，是期末考试的重要考察点。本模块《圆的初步》，重点包括垂径定理、圆周角定理、切线等重要知识点，同时也需要学生在理解概念的基础上，总结一定的解题思路，为后续综合学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块分为圆基础与垂径定理、圆周角定理及应用、与圆有关的位置关系、与圆有关的计算4讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼

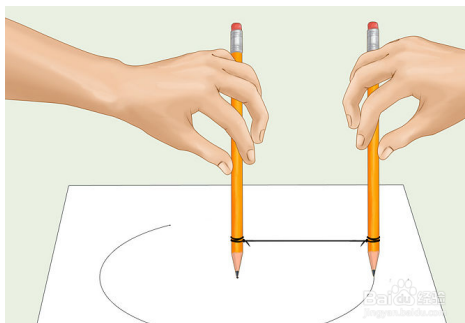
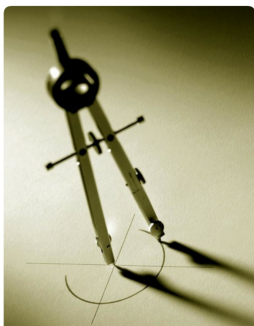


知识点	难度	考频
圆的基本概念	★	低
垂径定理	★★★★★	高
弧、弦、圆心角关系	★★★★	高
圆周角定理	★★★★★	高
圆内接四边形	★★★★	中
点与圆的位置关系	★★	低
直线与圆的位置关系	★★	中
切线的性质与判定	★★★★★	高
圆与正多边形	★★★★	中
圆中计算	★★★★	中

一、圆的基本概念

1. 圆的定义

思考：如何画圆



【备注】无论是利用圆规画圆还是定长的线段绕端点旋转，都可以分析出确定圆的两个条件：

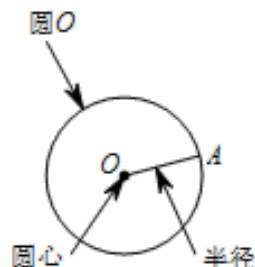
- ①圆心：确定圆的位置
- ②半径：确定圆的大小

(1) 圆的描述性定义：

在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆，其中固定端点 O 叫做圆心， OA 叫做半径。通常用符号 $\odot$ 表示圆，记作“ $\odot O$ ”，读作“圆 O ”。

从图中画图的过程也可以看出：

- ①圆上各点到定点（圆心 O ）的距离都等于定长（半径 r ）；
- ②到定点的距离等于定长的点都在同一个圆上。



(2) 圆的集合性定义：平面内到定的距离等于定的点的集合叫圆，定点叫圆，定长叫定长。

【备注】如果有几个点到同一个点（圆心）的距离相等，那么说明这几个点在同一个圆上。（根据圆的定义判断几个点共圆）

经过不共线的三点能确定一个圆，该圆的圆心为三角形的垂直平分线的交点；

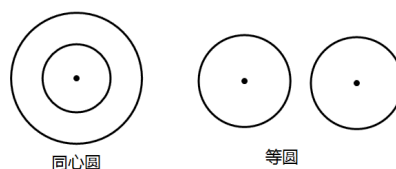
过 $n(n \geq 4)$ 个点的圆：只可以作0个或1个，当只可作一个时，其圆心是其中不共线三点确定的圆的圆心。

(3) 同圆：圆心相同且半径相等的圆叫同圆；

(4) 同心圆：半径不相等的两个圆叫做同心圆；

(5) 等圆：半径相等（能够重合）的两个圆叫做等圆。

(6) 圆的对称性：圆既是轴对称图形也是中心对称图形，对称轴为直径所在的直线。

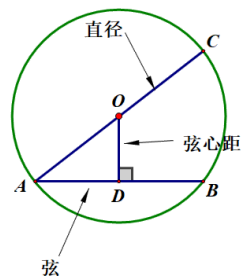


【备注】同圆或等圆的半径相等。同心圆仅指圆心相同。

2. 弦的定义

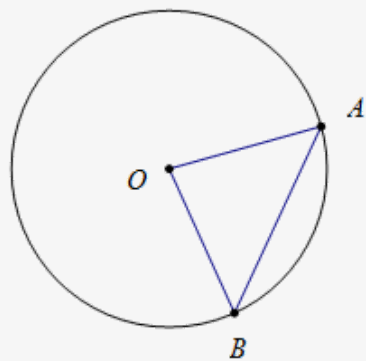
- (1) 弦：连结 圆上 任意两点的 线段 叫做弦。
(2) 直径：经过 圆心 的弦叫做圆的直径，直径等于半径的 2 倍。
(3) 弦心距：从 圆心 到 弦 的距离叫做弦心距。

！注意：①直径是最 长 的弦，圆中，弦长AB的取值范围是： 。
②直径是弦，是经过圆心的特殊的弦，但弦 不一定 是直径。



思考：如何证明直径是圆中最长的弦

【备注】如图：在 $\triangle OAB$ 中， $OA + OB > AB$ （两边之和大于第三边）；
当O、A、B三点共线且A、B两点不重合时，弦AB最大，且等于直径。
所以直径是最长的弦。



3. 弧的定义

(1) 弧：圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧。以AB为端点的圆弧记作 $\widehat{AB}$ ，读作 弧AB。

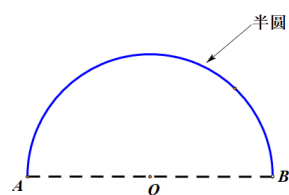
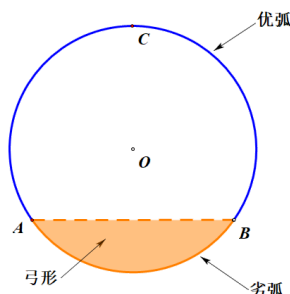
(2) 等弧：在 同圆或等圆 中，能够 互相重合 的弧叫做等弧。

(3) 半圆：圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做半圆。

(4) 优弧：大于 半圆的弧叫做优弧，用 三 个大写字母表示，如 $\widehat{ACB}$ 。

(5) 劣弧：小于 半圆的弧叫做劣弧，用 两 个大写字母表示，如 $\widehat{AB}$ 。

(6) 弓形：由 弦 及其所对的 弧 组成的图形叫做弓形。



【备注】注意：

弧分为三种：半圆、优弧、劣弧（半圆既不是优弧也不是劣弧）

1. 下列说法错误的是（ ）.

- A. 已知圆心和半径可以作一个圆
- B. 经过一个已知点 A 的圆能做无数个
- C. 经过两个已知点 A, B 的圆能做两个
- D. 经过不在同一直线上的三个点 A, B, C 只能做一个圆

【备注】 确定圆的条件：经过不共线的三点可以确定一个圆

【答案】 C

【解析】 A 选项：已知圆心和半径可以作一个圆，故A正确；

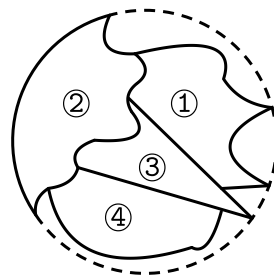
B 选项：经过一个已知点 A 的圆能做无数个，故B正确；

C 选项：经过两个已知点 A, B 的圆能做无数个，圆心在线段 AB 的垂直平分线上，故C错误；

D 选项：经过不在同一直线上的三个点 A, B, C 只能做一个圆，故D正确。
故选 C.

【标注】 【知识点】 不在同一直线上的三点确定一个圆

2. 小明不慎把家里的圆形玻璃打碎了，其中四块破片如图所示，为配到与原来大小一样的圆形玻璃，小明带到商店去的一块玻璃碎片应该是（ ）.



- A. 第①块
- B. 第②块
- C. 第③块
- D. 第④块

【备注】 只有②中能找出圆上的任意三点

【答案】 B

【解析】 根据“不在同一直线上的三点确定一个圆”可知第②块符合题意.

具体作法：在完整的弧线上任意作两条弦，作出两条弦的垂直平分线，交点即为圆心.

【标注】 【知识点】 不在同一直线上的三点确定一个圆

3. 判断：将下列语句中，正确的序号填在横线上正确的有：_____。

1. 直径是弦；
2. 弦是直径；
3. 半圆是弧；
4. 半径相等的两个圆是等圆；
5. 过圆心的线段是直径；
6. 两个端点能够重合的弧是等弧；
7. 圆的任意一条弦把圆分成优弧和劣弧两部分；
8. 长度相等的弧是等弧；
9. 直径是最大的弦；
10. 半圆所对的弦是直径；
11. 两个劣弧的和是半圆；
12. 两个半圆是等弧；
13. 圆的半径是 R ，则弦长的取值范围是大于0且不大于 $2R$ 。

【备注】 弦、弧、直径的判定

【答案】 TFTTFFFFTTFTT

【解析】 (2)，最大的弦是直径，但不一定所有的弦都是直径，所以不正确。

(5)，过圆心的线段可以不与圆相交，可以与圆相交，长度可以比直径长，也可以短于直径，所以不正确。

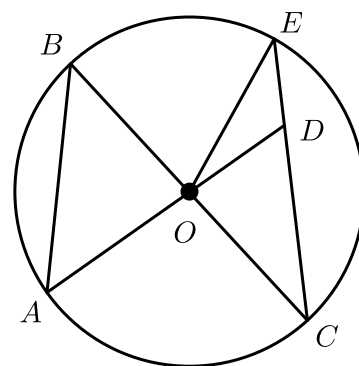
(6)，可能这两条弧共同构成一个圆。

(7)可能平分。

(8)在同一个圆中长度相等的弧才是等弧。

【标注】 【知识点】圆的定义

4. 如图，在 $\odot O$ 中，点 A, O, D 以及点 B, O, C 分别在一条直线上，图中的弦的条数有（ ）。



A. 2条

B. 3条

C. 4条

D. 5条

【备注】 注意弦的定义：圆上任意两点间的部分
 AB 、 BC 、 CE 为圆中的弦

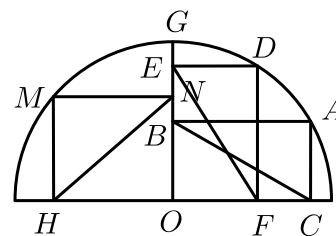
【答案】 B

【解析】 由图可知，点 A 、 B 、 E 、 C 是 $\odot O$ 上的点，
 图中的弦有 AB 、 BC 、 CE ，一共3条。
 故选答案为B。

【标注】 【知识点】圆的定义

栗子3

5. 如图，点 A 、 D 、 G 、 M 在半圆上，四边形 $ABOC$ ， $DEOF$ ， $HMNO$ 均为矩形，设 $BC = a$ ， $EF = b$ ， $NH = c$ ，则 a ， b ， c 的大小关系为_____。



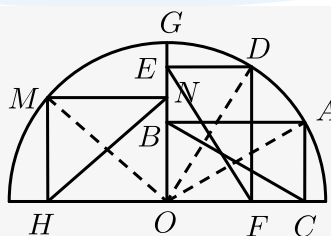
【备注】 圆与矩形结合，利用矩形对角线相等的性质，可得： $NH = MO = r$ 、 $EF = OD = r$ 、
 $BC = OA = r$

【答案】 $a = b = c$

【解析】 连接 OM ， OA ， OD ，

由题意知：四边形 $OHMN$ ，四边形 $DEOF$ ，四边形 $OBAC$ 均为矩形。

$$\begin{aligned}\therefore BC &= OA = R, \\ EF &= OD = R, \\ NH &= OM = R. \\ \therefore a &= b = c.\end{aligned}$$

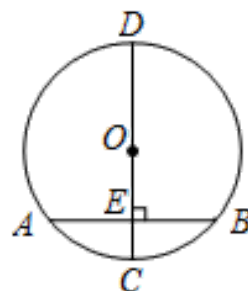


【标注】【知识点】圆的定义

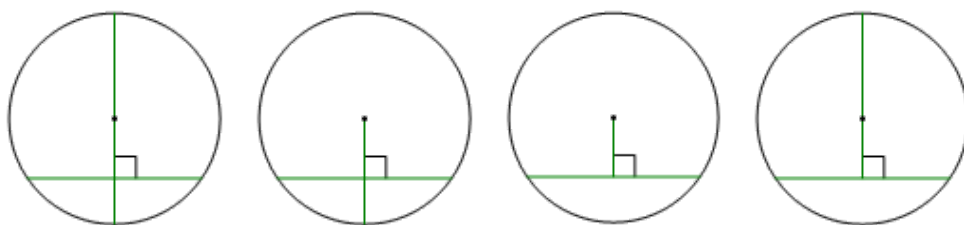
二、垂径定理

1. 垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

垂径定理	如图，CD是$\odot O$的直径，AB为弦，$CD \perp AB$，垂足为E， 则 $AE = BE$，$\widehat{AD} = \widehat{BD}$，$\widehat{AC} = \widehat{BC}$。
	注意：这里的垂径可以是<u>直径</u>、<u>半径</u>、<u>弦心距</u>或者过圆心的<u>直线或线段</u>，其本质是过<u>圆心</u>。



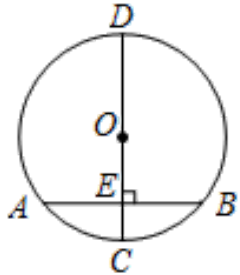
常见的垂径定理模型：



【备注】当题目中要求弦长、弦心距、半径、直径、或者弓形深度等线段长度时，可以利用垂径定理构造直角三角形求解。

在构造直角三角形中常用的辅助线有：①连接半径。②过圆心作弦的垂线段。

2. 垂径定理的推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

垂径定理推论	如图，$\odot O$的直径CD经过弦AB（非直径）的中点E点， 则 $CD \perp AB$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ 
	注意： 平分弦中弦的约束条件“不是”，因为圆中任意两条直径都互相平分，但不一定垂直

【备注】①垂径定理的证明：

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 E 是弦 DC 的中点。

在 $\triangle OED$ 和 $\triangle OEC$ 中，

$$\begin{cases} OE = OE \\ DE = CE \\ OD = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle OED \cong \triangle OEC$ (SSS)

$\therefore BA \perp CD$.

$\therefore$ 直径 AB 垂直平分弦 CD .

②知二推三：

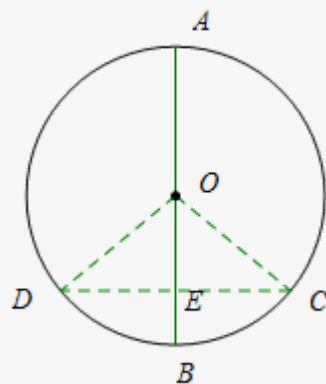
若一条直线具备以下五点中的任意两点：

① 过圆心；② 垂直于弦；③ 平分弦（不是直径）；

④ 平分弦所对的优弧；⑤ 平分弦所对的劣弧，

则必然具备其余三条，简称“知二推三”。

知二推三可以作为真命题应用于不写过程的客观题，但不能直接应用于解答题。



举个“栗”子

栗子4

6. 下列判断正确的是（ ）。

A. 平分弦的直线垂直于弦

B. 平分弧的直线必定平分这条弧所对的弦

C. 弦的中垂线必平分弦所对的两条弧

D. 平分弦的直线必平分弦所对的两条弧

【答案】 C

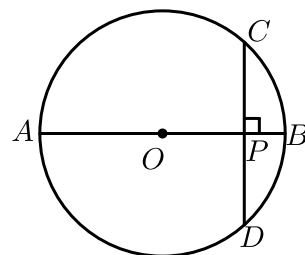
【解析】 A选项：平分弦（非直径）的直径垂直于弦，故A错误；

B 选项：平分弧的直径必定平分这条弧所对的弦，故B错误；
 C 选项：弦的中垂线必平分弦所对的两条弧，符合垂径定理，故C正确；
 D 选项：平分弦（非直径）的直径必平分弦所对的两条弧，故D错误。
 故选 C。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

栗子5

7. 如图， $\odot O$ 的直径 $AB = 12$ ， CD 是 $\odot O$ 的弦， $CD \perp AB$ ，垂足为 P ，且 $BP : AP = 1 : 5$ 。则 CD 的长为（ ）。



A. $2\sqrt{5}$

B. $4\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{2}$

D. $8\sqrt{2}$

【备注】垂径定理的应用，易得 $OP = 4$ ，求 CD 的长度，可求 CP ；连接 OC ，构造 $Rt\triangle CPO$ ，利用勾股定理求解

【答案】B

【解析】 $\because \odot O$ 直径 $AB = 12$ ，

$$\therefore OB = \frac{1}{2}AB = 6，$$

$$\because BP : AP = 1 : 5，$$

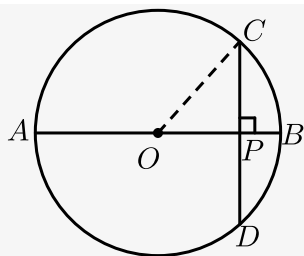
$$\therefore BP = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6} \times 12 = 2，$$

$$\therefore OP = OB - BP = 6 - 2 = 4，$$

$$\because CD \perp AB，$$

$$\therefore CD = 2PC。$$

如图，连接 OC ，



在 $\text{Rt}\triangle OPC$ 中，

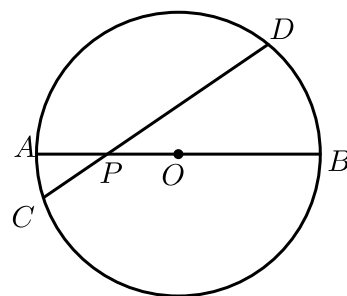
$$\because OC = 6, OP = 4,$$

$$\therefore PC = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore CD = 2PC = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

8. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 CD 交 AB 于点 P ， $AP = 2$ ， $BP = 6$ ， $\angle APC = 30^\circ$ ，则 CD 的长为（ ）。



A. $\sqrt{15}$

B. $2\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{15}$

D. 8

【备注】 CD 为圆中的弦，可利用垂径定理求弦长；因此过点 O 作 $OH \perp CD$ ，连接 CO ，先求出 PH 的长度，然后在 $\text{Rt}\triangle CHO$ 即可利用垂径定理求 CH 的长

【答案】 C

【解析】作 $OH \perp CD$ 于点 H ，连接 OC ，如图，

$$\because OH \perp CD$$

$$, \therefore$$

$$HC = HD$$

$$,$$

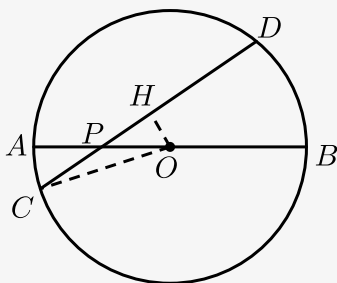
$$\because AP = 2,$$

$$BP = 6,$$

$$\therefore AB = 8,$$

$$\therefore OA = 4,$$

$$\therefore OP = OA - AP = 2, \text{ 在 } \text{Rt}\triangle OPH \text{ 中},$$

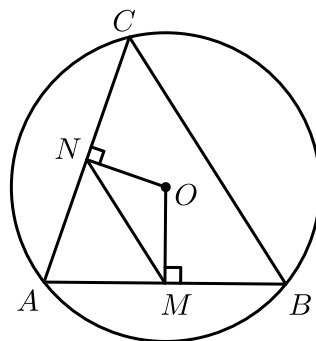


$\therefore \angle OPH = 30^\circ$,
 $\therefore \angle POH = 60^\circ$,
 $\therefore OH = \frac{1}{2}OP = 1$,
 在 $\text{Rt}\triangle OHC$ 中 ,
 $\therefore OC = 4$, $OH = 1$,
 $\therefore CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{15}$,
 $\therefore CD = 2CH = 2\sqrt{15}$.
 故选C .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

栗子6

9. 如图，已知 AB 、 AC 都是 $\odot O$ 的弦， $OM \perp AB$ ， $ON \perp AC$ ，垂足分别为 M ， N ，若 $MN = \sqrt{5}$ ，那么 BC 等于（ ）.



- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$

【备注】垂径定理与三角形中位线结合

由 $ON \perp AC$ ， $OM \perp AB$ ，可得 M 、 N 分别为 AB 、 AC 的中点， MN 即为 $\triangle ABC$ 的中位线

【答案】C

【解析】 $\because AB$ 、 AC 都是 $\odot O$ 的弦， $OM \perp AB$ ， $ON \perp AC$ ，垂足分别为 M 、 N ，

$\therefore M$ 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点，

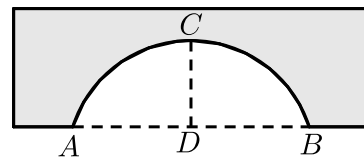
$\therefore MN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore BC = 2MN = 2\sqrt{5}$.

故选C .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

10. 如图，圆弧形桥拱的跨度 $AB = 12$ 米，拱高 $CD = 4$ 米，则拱桥的半径为（ ）。



A. 6.5米

B. 9米

C. 13米

D. 15米

【备注】垂径定理与方程思想结合

圆弧形拱桥为轴对称图形，可得 $CD \perp AB$ ；圆心一定在弦的垂直平分线上，因此构造圆心的位置，设半径为 r ，在 $Rt\triangle ADO$ 中利用勾股定理列方程

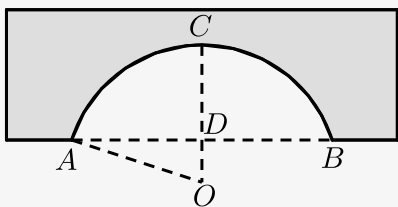
【答案】A

【解析】根据垂径定理的推论，知此圆的圆心在 CD 所在的直线上，设圆心是 O ，

连接 OA ，如图．根据垂径定理，得 $AD = 6$ ，

设圆的半径是 r ，根据勾股定理，得 $r^2 = 36 + (r - 4)^2$ ，解得 $r = 6.5$ ，

故选：A．



【标注】【能力】运算能力

【知识点】垂径定理以及应用

【思想】数形结合思想

垂径定理与分类讨论思想结合

11. 已知 $\odot O$ 的直径 $CD = 10\text{cm}$ ， AB 是 $\odot O$ 的弦， $AB \perp CD$ ，垂足为 M ，且 $AB = 8\text{cm}$ ，则 AC 的长为（ ）。

A. $2\sqrt{5}\text{cm}$

B. $4\sqrt{5}\text{cm}$

C. $2\sqrt{5}\text{cm}$ 或 $4\sqrt{5}\text{cm}$

D. $2\sqrt{3}\text{cm}$ 或 $4\sqrt{3}\text{cm}$

【备注】讨论弦与直径的位置关系

【答案】C

【解析】连接 AC ， AO ，

$\because \odot O$ 的直径 $CD = 10\text{cm}$ ， $AB \perp CD$ ， $AB = 8\text{cm}$ ，

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm}$ ， $OD = OC = 5\text{cm}$ ，

当 C 点位置如图1所示时，

$\because OA = 5\text{cm}$ ， $AM = 4\text{cm}$ ，

$CD \perp AB$ ，

$\therefore$

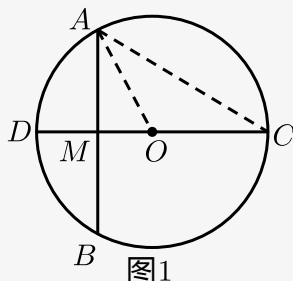


图1

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}，$$

$\therefore CM = OC + OM = 5 + 3 = 8\text{cm}$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}\text{cm}。$$

当 C 点位置如图2所示时，同理可得 $OM = 3\text{cm}$ ，

$\because OC = 5\text{cm}$ ，

$\therefore MC = 5 - 3 = 2\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中，

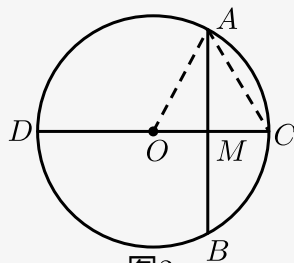


图2

$$AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\text{cm}。$$

【标注】【知识点】圆与勾股

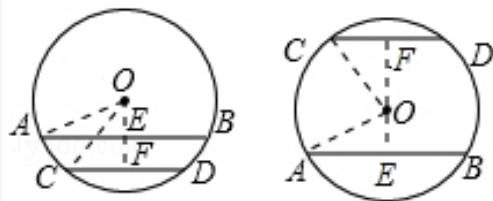
【知识点】垂径定理以及应用

【思想】分类讨论思想

栗子9

12. 已知： $\odot O$ 的半径为 25cm ，弦 $AB = 40\text{cm}$ ，弦 $CD = 48\text{cm}$ ， $AB \parallel CD$ 。求这两条平行弦 AB ， CD 之间的距离。

【备注】圆中两平行弦的距离，等于弦心距之和或之差，要讨论弦在圆心同侧还是异侧。



当 AB 、 CD 在圆心同侧时，平行弦 AB 、 CD 的距离 $EF = OF - OE$ ；

当 AB 、 CD 在圆心异侧时，平行弦 AB 、 CD 的距离 $EF = OE + OF$ 。

【答案】 8cm或22cm。

【解析】 (1)如图1，连接 OB ， OD ，做 $OM \perp AB$ 交 CD 于点 N ，

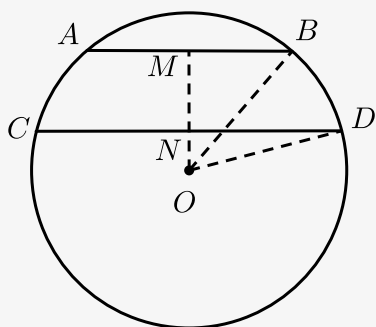


图1

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore ON \perp CD,$$

$$\because AB = 40\text{cm}, CD = 48\text{cm},$$

$$\therefore BM = 20\text{cm}, DN = 24\text{cm},$$

$$\because \odot O \text{ 的半径为 } 25\text{cm},$$

$$\therefore OB = OD = 25\text{cm},$$

$$\therefore OM = 15\text{cm}, ON = 7\text{cm},$$

$$\therefore MN = OM - ON,$$

$$\therefore MN = 8\text{cm}.$$

(2)如图2，连接 OB ， OD ，做直线 $OM \perp AB$ 交 CD 于点 N ，

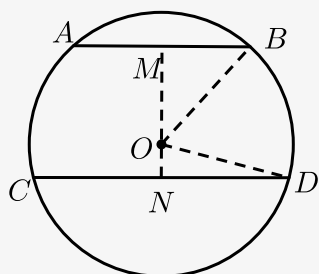


图2

$$\because AB \parallel CD,$$

$\therefore ON \perp CD$,
 $\therefore AB = 40\text{cm} , CD = 48\text{cm} ,$
 $\therefore BM = 20\text{cm} , DN = 24\text{cm} ,$
 $\therefore \odot O$ 的半径为 $25\text{cm} ,$
 $\therefore OB = OD = 25\text{cm} ,$
 $\therefore OM = 15\text{cm} , ON = 7\text{cm} ,$
 $\therefore MN = OM + ON ,$
 $\therefore MN = 22\text{cm} .$
 $\therefore$ 平行弦 AB , CD 之间的距离为 8cm 或 $22\text{cm} .$

【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】勾股定理

【知识点】圆与勾股

【知识点】垂径定理以及应用

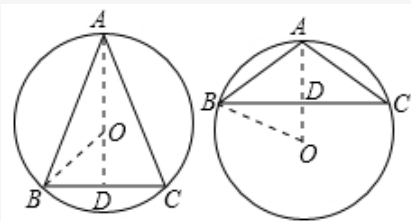
【知识点】平行线的性质

【思想】分类讨论思想

栗子10

13. 等腰 $\triangle ABC$ 内接于半径为5的 $\odot O$ ，点 O 到底边 BC 的距离为3，则 AB 的长为 _____ .

【备注】圆中等腰三角形，已知半径、底，求顶点到底边的距离，要讨论锐角三角形还是钝角三角形 .



当 $\triangle ABC$ 是锐角等角三角形时，顶点到底边的距离 $AD = OA + OD$ ；

当 $\triangle ABC$ 是钝角等角三角形时，顶点到底边的距离 $AD = OA - OD$.

【答案】 $4\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

【解析】如图1， $OB = 5$ ， $OD = 3$ ，在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中， $BD = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = 8$ ， $AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$.

如图2， $OB = 5$ ， $OD = 3$ ，在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中， $BD = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = 2$ ， $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

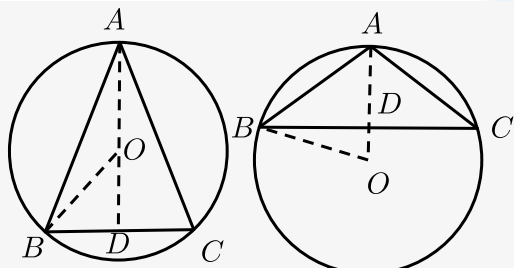


图 1

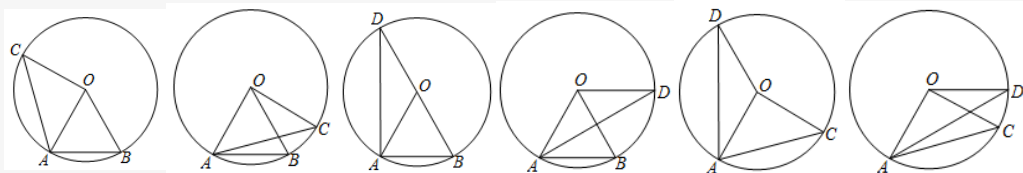
图 2

【标注】【知识点】垂径定理的推论以及应用

栗子11

14. $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$ ，弦 $AB = \sqrt{6}$ ，弦 $AC = 2$ ，则 $\angle BAC$ 度数为 _____ .

【备注】共顶点的弦所形成的夹角，要分类讨论 .



如图，已知 OA 、 OB 、 OC 、 OD 是 $\odot O$ 的半径， $\triangle AOB$ 是等边三角形， $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形， $\triangle AOD$ 是顶角为 120° 的等腰三角形 .

则 $\angle CAB = 60^\circ \pm 45^\circ$ ， $\angle BAD = 60^\circ \pm 30^\circ$ ， $\angle CAD = 45^\circ \pm 30^\circ$.

等边三角形三边关系 $1:1:1$ ，等腰直角三角形三边关系 $1:1:\sqrt{2}$ ，

120° 的等腰三角形三边关系 $1:1:\sqrt{3}$.

【答案】 15° 或 75°

【解析】如图1，连接 OA ，过 O 作 $OE \perp AB$ 于 E ， $OF \perp AC$ 于 F ，

$$\therefore \angle OEA = \angle OFA = 90^\circ .$$

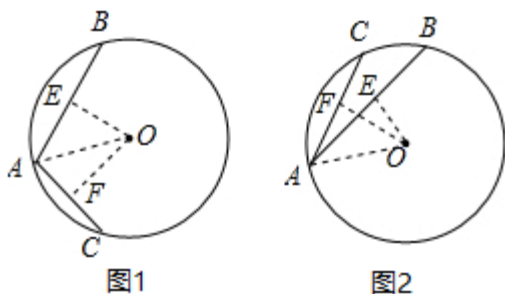
由垂径定理，得 $AE = BE = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $AF = CF = 1$ ，

$$\therefore \cos \angle OAE = \frac{AE}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}，\cos \angle OAF = \frac{AF}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}，$$

$$\therefore \angle OAE = 45^\circ，\angle OAF = 30^\circ，$$

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ .$$

同理，如图2， $\angle BAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

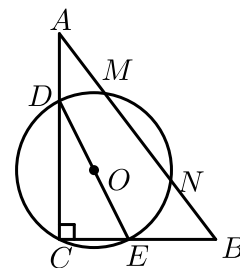


【标注】【知识点】探究特殊角的三角函数值

【知识点】垂径定理以及应用

独步天下

15. 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $AC = 4$ ， D 、 E 分别是 AC 、 BC 上的一点，且 $DE = 3$ ．若以 DE 为直径的圆与斜边 AB 相交于 M 、 N ，则 MN 的最大值为 _____ ．



【备注】此题可通过寻找点 O 的轨迹求最值

过点 O 作 $OG \perp MN$ ，则 $MG = GN$

在 $Rt\triangle OGM$ 中， $OM = 1.5$ ， $MG = \sqrt{OM^2 - OG^2}$ ，当 OG 最小时， MG 最大，

$\therefore OC = 1.5$ ，

$\therefore O$ 在以 C 为圆心，半径为1.5的圆上运动，

$\therefore$ 过点 C 作 $CF \perp AB$ ，此时与 $\odot C$ 的交点即为 O ，

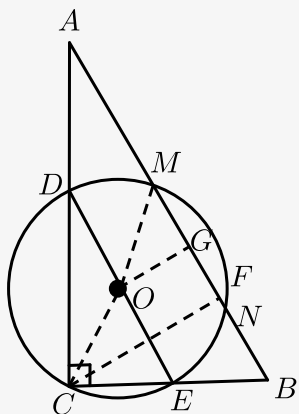
$\therefore CF = \frac{12}{5}$ ，

$\therefore OF = \frac{9}{10}$ ， $MG = \frac{12}{10}$ ，

$\therefore MN = \frac{12}{5}$

【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】取 DE 的中点 O ，过 O 作 $OG \perp AB$ 于 G ，连接 OC ，



又 $\because CO = 1.5$,

$\therefore$ 只有 C 、 O 、 G 三点一线时 G 到圆心 O 的距离最小,

$\therefore$ 此时 OG 达到最小,

$\therefore MN$ 达到最大,

作 $CF \perp AB$ 于 F ,

$\therefore G$ 和 F 重合时, MN 有最大值,

$\because \angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\because \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CF,$$

$$\therefore CF = \frac{12}{5},$$

$$\therefore OG = \frac{12}{5} - \frac{3}{2} = \frac{9}{10},$$

$$\therefore MG = \sqrt{OM^2 - OG^2} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore MN = 2MG = \frac{12}{5}.$$

【标注】【知识点】圆与勾股